CH2 DYNAMIQUE D'UN UNIVERS HOMOTROPE

2.1 Dynamique de Newton

2.1.1 Equation de continuité :

→ Soit une sphère de rayon R. On a :

$$\rho(t) = \frac{Mc^{2=1}}{V} = \frac{M}{4\pi R^3/3} = \frac{3M}{4\pi}\frac{1}{a^3\chi^3}\cdot\frac{a_0^3}{a_0^3} = \frac{3M}{4\pi\chi^3 a_0^3}\cdot\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

$R = a.\chi$

$$\Rightarrow \dot\rho = -3\rho_0\frac{a_0^3}{a^4}.\dot a = -3\frac{\dot a}{a}\cdot\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

DEF L'équation de continuité stipule que la masse totale dans un volume comobile est constante :

$$\dot\rho = -3H\rho$$

2.1.2 Dynamique gravitationnelle :

→ En espace-temps plat, on a selon Newton :

$$m\ddot d = -\frac{GMm}{d^2} = -\frac{Gm}{d^2}\rho V = -\frac{Gm\rho}{d^2}\cdot\frac{4\pi}{3}d^3$$

$d = a\chi$

$$\Leftrightarrow \ddot d = -\frac{4\pi}{3}G\rho d \Leftrightarrow \ddot a = -\frac{4\pi}{3}G\rho a$$

DEF L'équation dynamique est donnée par

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho < 0$$

→ De manière équivalente,

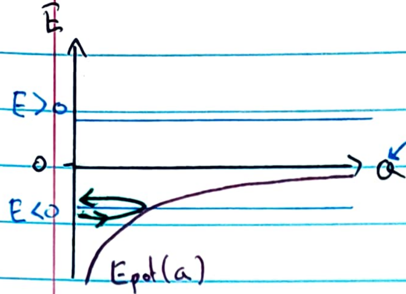
$$\ddot a\dot a = -\frac{4}{3}\pi G\rho\dot a a = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a^3}.a.\dot a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot a^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a} + C\right]$$

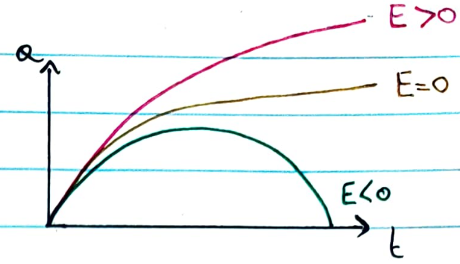
$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\dot a^2}_{E_{cin}} - \underbrace{\frac{4\pi}{3}G\rho_0 a_0^3.\frac{1}{a}}_{E_{pot}} = \underbrace{C}_{E_{tot}}$$

$$\Leftrightarrow H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{2E}{a^2} \Leftrightarrow \rho = \left(H^2 - \frac{2E}{a^2}\right)\frac{3}{8\pi G}$$

$\left(E = \frac{\dot{a}^2}{2} - C \cdot \frac{1}{a}\right)$



si $V=E$, $\lim_{a\to\infty} \dot{a} = 0$



→ Enfin, on peut encore réécrire la relation. Remarquons que pour $E=0$, la densité prend une valeur particulière.

DEF | La densité critique est $\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$. On définit également le paramètre de densité :

$$\Omega \equiv \rho / \rho_c$$

Prop | Dans un univers plat, $\Omega > 1$ mène à un big crunch, et $\Omega < 1$ à un big cold.

→ On peut écrire $E = \frac{4\pi G a^2}{3} \rho_{cr} (1 - \Omega)$

2.1.3 Présence de pression :

→ 1e loi de thermo :

$$dE = d(\rho V) = d\rho . V + \rho dV = TdS - p dV$$

Or, univers homotrope $\Rightarrow TdS = dQ = 0$

→ Le volume ↗ (expansion) donc travail contre la pression :

$$dE = -p dV \Rightarrow \dot{\rho} V + \rho \dot{V} = -p \dot{V} \Leftrightarrow \dot{\rho} = -3H(\rho + p)$$

C'est l'équation de continuité modifiée.

DEF | On définit le paramètre w par $w \equiv P/\rho$

Prop | On exprime alors l'équation d'état :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} \quad \text{où } w = \begin{cases} 0 & \text{si matière} \\ 1/3 & \text{si radiation} \end{cases}$$

2.2 Dynamique de la Relativité Générale

2.2.1 Comparaison générale entre Newton et la RG :

	Newton	RG
Eq. de continuité	$\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ avec $\rho = E_{mass} + E_{cin}$	$\dot{\rho} = -3H(\rho+p)$ provient de $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$
Eq. dynamique	$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_{mass} + (\text{pression})$	$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$ C'est la 2^{nd} eq. de Friedmann
Conservation d'energie	$H^2 = \frac{8\pi G \rho_{mass}}{3} + \frac{2E}{a^2} + (\text{pression})$	$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2}$ C'est la 1^{e} eq. de Friedmann "E_{tot}" $\leftrightarrow$ courbure

2.2.2 Dérivation des équations de Friedmann :

→ On part de $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. On considère l'univers comme un fluide parfait dans un référentiel comobile (inertiel). Alors

$$T^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(\rho, -p, -p, -p)$$

En effet, pour un fluide parfait, $T_{ij}|_{i\neq j} = 0$ et $T_{0j}|_{j\neq 0} = 0$ par homotropie de l'univers.

DEF (EFE) Les équations d'Einstein sont données par

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

→ En utilisant la métrique FLRW, on peut calculer les $G_{\mu\nu}$.

On a $ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 ds_3^2$

où ds_3^2 est la métrique spatiale de l'espace plat, sphérique ou hyperbolique.

13 :

(pour le calcul, voir TP). On a $G_{00} = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) \overset{*}{=} 8\pi G T_{00} = 8\pi G \rho$

Les termes croisés sont nuls $G_{0k} = 0$;

$G_{kl} = -\eta_{kl}\frac{(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\, T_{kl} = 8\pi G\, p\, \eta_{kl}$

$\Leftrightarrow 2a\ddot{a} + \frac{a^2}{3}(8\pi G \rho) = -8\pi G\, p\, a^2$

$\Leftrightarrow 2a\ddot{a} = -8\pi G a^2 (p + \rho/3) \Leftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p)$

Et $(*) \Leftrightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$

DEF Les 2 équations de Friedmann sont :

$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \underset{\boxed{F1}}{=} \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2}$ et $\frac{\ddot{a}}{a} \underset{\boxed{F2}}{=} -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = \dot{H} + H^2$

→ Les 2 équations de Friedmann donne l'équation de continuité :

Équation de continuité : $\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \Leftrightarrow p = \frac{-\dot{\rho}}{3H} - \rho$

Insérée dans (F2), on a :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(-2\rho - \dot{\rho}/H) \Leftrightarrow \ddot{a}\dot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(-2\rho - \dot{\rho}/H)\dot{a}a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi G a^2}{3} - \frac{k}{2}\right) \Leftrightarrow (F1)$$

2.2.3 Première analyse des équations de Friedmann :

⊙ F2 : Considérons $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$

→ Si $\rho + 3p > 0$: alors $\ddot{a} < 0$

→ matière seule : $w = P/\rho = 0 \Leftrightarrow p = 0$ et $\rho > 0$

→ radiation seule : $w = 1/3 \Leftrightarrow \rho + 3p \Rightarrow 2\rho > 0$

→ Si $\rho + 3p = 0$; alors $\ddot{a} = 0$

→ Si $\rho + 3p < 0$: alors $\ddot{a} > 0$. Possible si présence d'une constante cosmologique positive / d'énergie noire. On aurait un fluide $p/\rho = -1 = w \Leftrightarrow \underset{= -2\rho}{\rho + 3p} < 0$

↳ Dans ce cas, $w<0$: la pression est négative! On a 2 implications :

① L'expansion du volume fournit un travail négatif contre la pression:

⇒ le volume gagne de l'énergie ⇝ accélération

$$\frac{\rho}{\rho_0} \overset{(*)}{=} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3w}$$

dilution du volume $\propto a^3$ ↳ travail négatif

② Quand $p<0$, la pression contribue comme une source de gravitation négative :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \underbrace{3p}_{<0})$$

→ En résumé:

	w	p	Eq. d'évolution :
matière :	$w=0$	$p=0$	$\rho/\rho_0 = (a/a_0)^{-3}$
radiation :	$w=1/3$	$p=\rho/3$	$\rho/\rho_0 = (a/a_0)^{-4}$
energie noire :	$w=-1$	$p=-\rho$	$\rho/\rho_0 = 1$ (*)

↳ Si energie noire, les 2 effets se compensent parfaitement (voir (*)): c'est un champ scalaire qui se met dans son état fond. qui possède une énergie fixe : l'energie sombre.

⊙ F1 : Considérons $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho}{H^2} = \frac{\rho}{\rho_c} = \Omega \qquad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

→ En $t=t_0$, on a : $\frac{k}{a_0^2} = (\Omega_0 - 1)H_0^2 \Leftrightarrow a_0^2 = \frac{k}{(\Omega_0-1)H_0^2}$

↳ a_0 est déterminé par (ρ_0, H_0, k)

→ Si $\Omega_0 = 1$, alors $k=0$ et l'univers est plat (univers ouvert)

Si $\Omega_0 > 1$, alors $k=+1$ et l'univers est sphérique (fermé)

$\Omega_0 < 1$, alors $k=-1$ et l'univers est hyperbolique (ouvert)

PROP La densité d'énergie ρ détermine la géométrie de l'univers.

15

2.3 Solutions aux équations de Friedmann

→ Résolvons (F1) : $H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}$

$\Leftrightarrow \dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho a^2}{3} - k \Leftrightarrow \dot{a}^2 + k = (8\pi G\rho a^2)/3$

→ Changement de variable : on introduit la grandeur suivante.

DEF On définit le temps conforme η selon
$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}$$

On pose alors $d\eta = dt/a \rightsquigarrow \frac{d}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t}\cdot\frac{d}{d\eta} = \frac{1}{a}\cdot\frac{d}{d\eta}$

↳ $\dot{a}^2 + k = (8\pi G\rho a^2)/3 \longmapsto \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + k = (8\pi G\rho a^2)/3$

$\Leftrightarrow a'^2 + ka^2 = 8\pi G\rho a^4/3 \;\|\; \partial_t$ et $\dot{\rho} = -3H(\rho+p) = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho+p)$
$= \rho'/a$

$\Leftrightarrow a'' + ka = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3p)a^3$

2.3.1 Univers de matière (poussière non relativiste) :

→ On a $p = 0 \Rightarrow (\rho - 3p)a^3 = \rho a^3 \propto a^{-3}\cdot a^3 \propto$ constante
Il faut alors résoudre $a'' + ka = $ cste

→ On trouve $a(\eta) = \begin{cases} \frac{2\pi G}{3}\rho a^3\cdot\eta^2 & \text{pour } k=0 \\ \frac{4\pi G}{3}\rho a^3\cdot(1-\cos\eta) & \text{pour } k=1 \\ \frac{4\pi G}{3}\rho a^3(\cosh\eta - 1) & \text{pour } k=-1 \end{cases}$

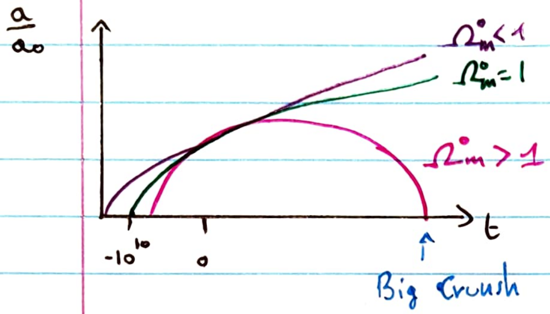
→ Remarque : le cas $k=0$ revient à une équa. diff homogène $\dot{a}^2 \propto a^2$ en a et ne fixe pas la normalisation

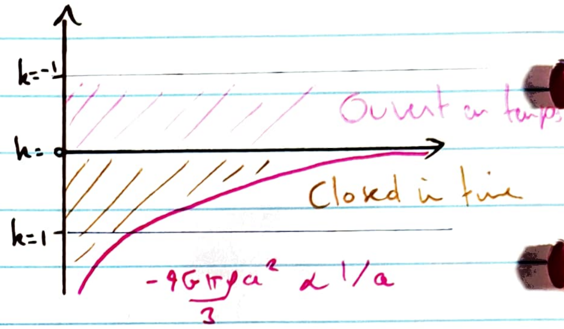
→ En revenant à $t = \int a(\eta)\,d\eta \propto \begin{cases} \eta^3/3 \\ \eta - \sin\eta \\ \sinh\eta - \eta \end{cases}$, seule le cas $k=0$ est algébrique.

Pour $k=0$, on trouve $a(t) = \underbrace{\left(\frac{2\pi G\rho}{3}\right)^{1/3} a}_{\text{constante}} . (3t)^{2/3}$

et $H = \dot{a}/a = \frac{2}{3} t^{-1} \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} H^{-1}$ et $t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}$

↳ L'age de l'univers estimé serait alors $t_0 = 10^{10}$ ans
(trop cours pour les amas globulaires)





→ Pour $k=0$, exprimons le temps comme fonction du redshift :
$\frac{a_0}{a} = 1+z \Rightarrow t = \frac{2}{3H_0} . \frac{1}{(1+z)^{3/2}}$ car $t_0 = 2/3H_0$

→ En mesurant H_0 et ρ_0, on déduit t_0, a/a_0, $H(t)$, $t(z)$, a_0

2.3.2 Univers de radiation :

→ On a $p = \rho/3$ donc $\rho - 3p = 0$. On doit resoudre $a'' + ka = 0$

On trouve : $a(\eta) = \sqrt{\frac{8\pi G\rho a^4}{3}} . \begin{cases} \eta & \text{pour } k=0 \\ \sin\eta & \text{pour } k=1 \\ \sinh\eta & \text{pour } k=-1 \end{cases}$

$$\| $$

$$c = \frac{\sqrt{\Omega_0}}{|\Omega_0 - 1| H_0} \quad \text{(arbitraire pour } k=0)$$

→ Exprimons $a(\eta(t)) = a(t)$:

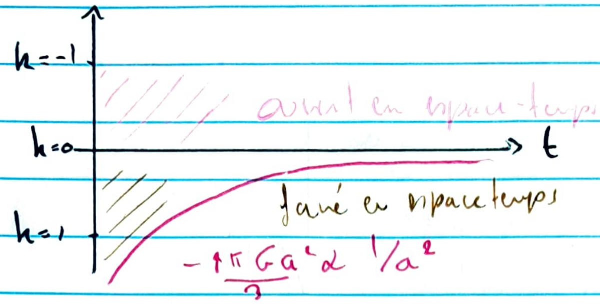
$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{c} . \sqrt{2t} & \text{pour } k=0 \\ c . \sin[\arccos(1 - t/c_1)] & \text{pour } k=1 \\ c . \sinh[\operatorname{arccosh}(t/c_1 + 1)] & \text{pour } k=-1 \end{cases}$$

→ Dans le cas $k=0$, on a : $H(t) = \frac{1}{2t} \Leftrightarrow t = 1/2H$

→ En fonction du redshift, on a :

$$t = \frac{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^2} - \sqrt{\Omega_0 (1+z)^2 + (1-\Omega_0)}}{H_0(\Omega_0 - 1)(1+z)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(1+z)^2} \frac{1}{H_0} \quad \text{pour } k=0 \ (\Leftrightarrow \Omega_0 = 1).$$



↳ Comportement similaire à un univers de matière, avec une pente plus forte

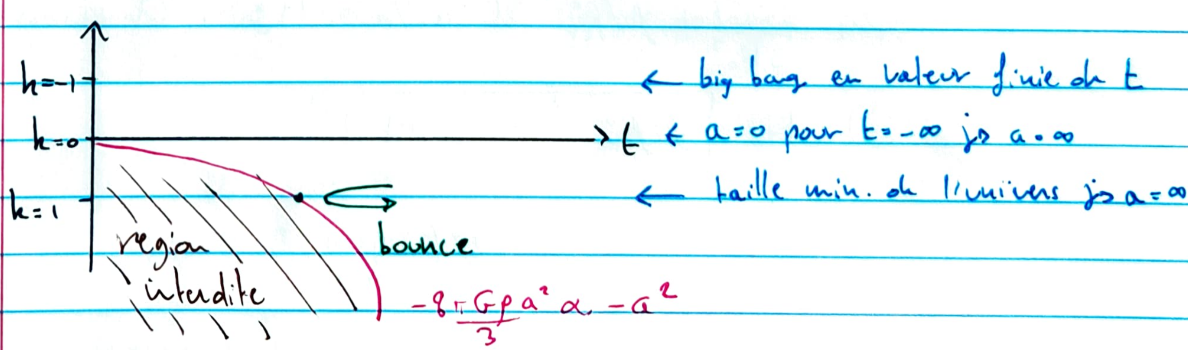
2.3.3 Energie noire (constante cosmologique) :

→ On a $p = -\rho$. On doit résoudre $\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = -k$

→ Si $k=0$, alors $a(t) = a_0 \exp\left\{(t-t_0)\underbrace{\sqrt{\frac{8\pi G \rho_0}{3}}}_{H_0}\right\}$

et $H(t) = \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3}}$

↳ Il n'y aurait pas de Big Bang !



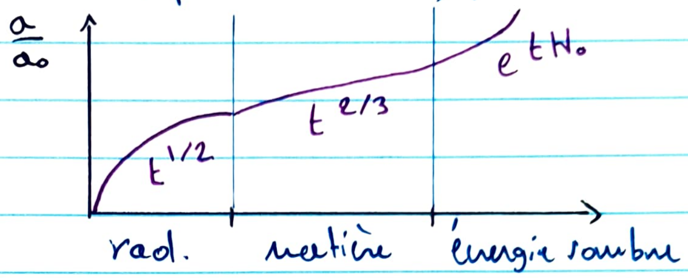
2.3.4 Univers mixte :

→ En général, différents régimes pourrait dominer à ≠ époques.

$$\rho = \rho_m^\circ \frac{a_0^3}{a^3} + \rho_r^\circ \frac{a_0^4}{a^4} + \rho_\Lambda^\circ$$

↳ La radiation domine d'abord, puis la matière, puis Λ.

↳ transition entre l'époque dominée par la radiation vers celle dominée par la matière lorsque



$$\rho_m^\circ (a_0^3/a^3) = \rho_r^\circ (a_0^4/a^4)$$

↳ Transition suivante en $\rho_m^\circ (a_0^3/a^3) = \rho_\Lambda^\circ$

2.3.5 Expression générale de $H(z)$ et $t(z)$:

→ En t_0, (F1) ⇒ $H_0^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} - \frac{k}{a_0} \iff \frac{k}{H_0^2 a_0^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3 H_0^2} - 1 = \Omega_0 - 1$

→ En t, (F1) ⇒ $\frac{H^2}{H_0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho - \frac{k}{a^2 H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho - \frac{a_0^2}{a^2}(\Omega_0 - 1)$

Ainsi, $H = H_0 \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3 H_0^2} + (1-\Omega_0)\frac{a_0^2}{a^2}}$

Or, $\frac{8\pi G \rho}{3 H_0^2} = \rho/\rho_{cr}^\circ$ et $a_0/a = 1+z$. On trouve

$$H(z) = H_0 \sqrt{\rho/\rho_{cr}^\circ + (1-\Omega_0)(1+z)^2}$$

De plus, $\rho = \rho_m^\circ \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_r^\circ \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_\Lambda^\circ$

$$\rho = \rho_m^\circ (1+z)^3 + \rho_r^\circ (1+z)^4 + \rho_\Lambda^\circ = \rho_{cr}^\circ \left(\Omega_m^\circ (1+z)^3 + \Omega_r^\circ (1+z)^4 + \Omega_\Lambda^\circ\right)$$

Or, par la section 1.3, $t = \int_z^\infty dz/(H(1+z))$. Ainsi,

$$t(z) = \frac{1}{H_0}\int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)^2} \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega_0) + \Omega_m^\circ (1+z) + \Omega_r^\circ (1+z)^2 + \Omega_\Lambda^\circ/(1+z)^2}}$$

On peut aussi obtenir $z(t)$

2.4 Ajustement du modèle apd données

→ On mesure $H_0, \Omega_m^\circ, \Omega_R^\circ, \Omega_\Lambda^\circ$ pour déduire $H(z)$, $t(z)$, $a_0 = \boxed{\frac{k}{|\Omega_0 - 1| H_0^2}}$
et $a(z) = \dfrac{a_0}{1+z}$

→ Les supernovae de type 1a SN_{1a} sont des chandelles standards : leur luminosité absolue est connue.
↳ A partir de z_{em} et $F = L/(4\pi a_0^2 \Phi^2(\chi_{em}) \cdot (1+z_{em})^2$, on obtient $a_0^2 \, \Phi^2(\chi_{em})$ en fonction z_{em} avec

$$\Phi^2(\chi_{em}) = \begin{cases} \chi_{em}^2 \\ \sin^2 \chi_{em} \\ \sinh^2 \chi_{em} \end{cases}$$

Or, $a_0 = \left(\dfrac{k}{|\Omega_0 - 1| H_0^2} \right)^{1/2}$, on trouve

$$\chi(z) = \frac{d_p(z)}{a_0} = \int_{z=0}^{z_{em}} \frac{dz}{H(z)} \cdot \frac{1}{a_0} = \int_0^{z_{em}} \frac{dz}{a_0} \frac{1}{H(H_0, \Omega_m^\circ, \Omega_r^\circ, \Omega_\Lambda^\circ)}$$

→ Mesures actuelles : $\Omega_0 = 1,0005 \pm 0,0033$
$\Omega_m = 31\,\% \pm 1,5\,\%$
$\Omega_\Lambda = 69\,\% \pm 1,5\,\%$
$\Omega_r \sim 0$
$h = 0,67 \pm 0,01$
$H_0 = (67 \pm 1)\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$

↳ On est donc dominé par l'énergie sombre : l'expansion s'accélère.

→ L'age de l'univers est plus grand que pour $\Omega_m^\circ = 1$. On a :
$t = 13,81 \pm 0,05$ Gyr

2.5 Milne Universe

→ En prenant la limite $\rho \to 0$, on considère un univers vide : tout les observateurs comobiles sont inertiels et ont une vitesse constante p/r aux autres, avec une vitesse max $= c$.

DEF L'univers de Milne est un modèle cosmologique de relativité restreinte, obtenu en prenant la limite $\rho \to 0$ de la métrique FLRW

→ $\lim_{\rho \to 0}$ (F1) $\Leftrightarrow H^2 - k/a^2 = 0 \overset{k=-1}{\Leftrightarrow} \dot{a}^2 = 1 \Rightarrow a(t) = t$

→ La métrique FLRW $ds^2 = dt^2 - t^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi \, d\Omega^2)$ doit être équivalente à $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. En effet, on pose
$\begin{cases} \tau = t \cosh \chi \\ r = t \sinh \chi \end{cases}$, on obtient $ds^2 = dt^2 - t^2 d\chi^2 = dt^2 - dr'^2$

↳ Dans un univers de Milne, χ est la rapidité d'un observateur A p/r à un autre B.
$\Rightarrow v = \frac{r}{\tau} = \tanh \chi < 1$

$\Rightarrow d_p = \dot{a}(t)\chi$ peut être plus grand que $1 \, (=c)$, mais pas v
→ La rapidité est additive : $\chi_C^{(A)} = \chi_C^{(B)} + \chi_B^{(A)}$

→ Le redshift se réduit à $\frac{a_0}{a} = 1 + z = \frac{t_0}{t} = 1 + \frac{t_0 - t}{t} = 1 + \frac{\tau_0 - \tau}{\tau}$
$= 1 + \frac{r}{\tau c} = 1 + \frac{v}{c} \Rightarrow z = v/c$

→ Un univers vide est hyperbolique avec $\Omega_0 = 0 \Rightarrow a_0$ n'est pas fixé.